Ένα τελευταίο, πριν μπούμε στη Διαφόριση:

Πρόταση 1.4.8:

$U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U$
$:\Leftrightarrow$ κλειστό και $\exists (\bar{x}_{k_\nu})$ και
φραγμένο $\bar{x} \in U$, $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$. Αφού U φραγμένο,
$\Rightarrow \exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \bar{x} \in U$ (✓)
U: κλειστό (Προτ. 1.4.7)
$U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με
$\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in U$)

$\Leftarrow$: Έστω ότι U όχι φραγμένο. Τότε $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\exists \bar{x}_\nu \in U$ με $\|\bar{x}_\nu\| \geq \nu$.
$\Rightarrow \forall (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ $\|\bar{x}_{k_\nu}\| \geq k_\nu \geq \nu$
[$\nu \mapsto k_\nu$ με $k_{\nu+1} > k_\nu$. Άρα $k_1 \geq 1$ και αν $k_\nu \geq \nu$ τότε $k_{\nu+1} \geq k_\nu + 1 \geq \nu + 1$] Συνεπώς η $(\bar{x}_{k_\nu})$ δεν είναι φραγμένη $\xrightarrow{\text{Πρόταση}}$ $(\bar{x}_{k_\nu})$ δεν είναι συγκλίνουσα. Άτοπο.

Άρα U φραγμένο. Ν.δ.ο. U κλειστό:
Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \forall (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$: $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$
$\Rightarrow$ Από υπόθεση, $\bar{x} \in U$ $\square$

[Από υπόθεση ξέραμε ότι για την επιλεγμένη $(\bar{x}_\nu)$ υπάρχει κάποια $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και ένα $\bar{y} \in U$ έτσι ώστε $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{y} \in U$. Όμως όπως μόλις είδαμε ότι για κάθε $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ ισχύει $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$. Συνεπώς, και για την $(\bar{x}_{k_\nu})$ θα ισχύει από [αφού είναι υπακολουθία] και άρα από τη μία $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{y}$, από την άλλη $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$ $\xRightarrow{\text{μοναδ. ορίου}}$ $\bar{x} = \bar{y}$ $\xRightarrow{\bar{y} \in U}$ $\bar{x} \in U$.]

Κεντρικό Κεφάλαιο Α.Α ΙΙΙ (Διανυσματικής Ανάλυσης):

→ Διαφόριση (= Παραγώγιση) στον $\mathbb{R}^n$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕ Α.Α Ι / Πραγμ. Συναρτ. Μιας μεταβλητής

Υπάρχουν περισσότερα «είδη» διαφόρισης!

Μια από αυτές είναι η αντίστοιχη αυτής στον Α.Α Ι.

3.1 Μερικές Παράγωγοι

(partial derivatives)

(not. some)

Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό [για να είμαστε σίγουροι, ότι κάθε $\bar{x} \in U$ είναι σημείο συσσώρευσης (ως εσωτερικό σημείο) αφού θα χρησιμοποιούμε όρια συναρτήσεων στο σημείο $\bar{x}$].

Η f λέγεται μερικώς διαφορίσιμη στο σημείο $\bar{x}$ ως προς την i-οστή μεταβλητή ($i = 1, \dots, n$) αν υπάρχει η μερική παράγωγος της f στο $\bar{x}$ ως προς την i-οστή μεταβλητή.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h} \in \mathbb{R} \quad [\bar{e}_i = (0, \dots, \underset{\text{i-θέση}}{1}, 0, 0)]$$

Αν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ ως προς κάθε μεταβλητή x_i λέμε ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ και το διάνυσμα

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) =: \nabla f(\bar{x})$$

- Ονομάζεται κλίση της f στο $\bar{x}$ και συμβολίζεται και με grad $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$

[κλίση = gradient]

Παρατήρηση: Αν έχουμε όλες τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $\bar{x} \in U$ (δηλ. «όλες» = «για κάθε $i = 1, \dots, n$») τότε υπάρχει η κλίση της f στο $\bar{x}$, και αντιστρόφως.

Αν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε $\bar{x} \in U$ τότε λέμε (απλά) ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη.

<u>Παρατήρηση (για συμβολισμούς):</u> $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = f_{x_i}(\bar{x})$

$= \partial_{x_i} f(\bar{x})$ $[= \partial_i f(\bar{x})]$

<u>Σ.Σ. Παρατήρηση:</u> (Ερμηνεία της μερικής παραγώγου)

Η μερική παράγωγος της f στο $\bar{x}$ ως προς x_i
= η παράγωγος της συνάρτησης <u>μιας</u> μεταβλητής που προκύπτει αν κρατήσουμε όλες τις συντεταγμένες x_j με $j \neq i$ (του σημείου σταθερές και παραγωγίσουμε <u>μόνο</u> ως προς τη <u>μία</u> τρέχ. x) με x_i

<u>Πιο συγκεκριμένα:</u>

Έστω $i = 1, \dots n$ σταθερό και $\bar{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$f_i(x) := f(x_1, \dots x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $x \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$

<u>τότε</u> $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots x_n) - f(\bar{x})}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f_i'(x_i)$

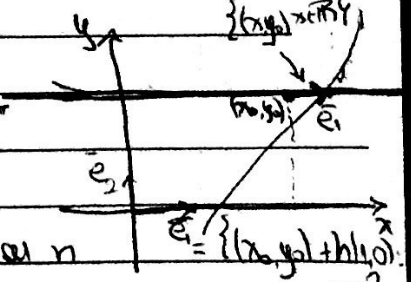
Γεωμετρικά, όταν θέλω να υπολογίσω το $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ περιορίζω την f στην ευθεία $\bar{x} + h\bar{e}_i$ και υπολογίζω την παράγωγο $g'(0)$ της συνάρτησης $g(h) := f(\bar{x} + h\bar{e}_i)$

<u>Σημείωση</u> (ιδίως σε εξετάσεις, θεωρούμε $n = 2$ ή 3)

<u>Παραδείγματα:</u>

(α) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$



$\left[= \frac{\partial}{\partial x} f(x, x_0)\Big|_{x = x_0}\right]$

εδώ ορίζεται η συνάρτηση $x \mapsto f(x, y_0) \in \mathbb{R}$

$\bar{e}_1 = \{(x_0, y_0) + h(1,0) : h \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x_0, y_0) + (x - x_0, 0) : \dots\}$
$= \{(x_0, y_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{h}(1,0) : x \in \mathbb{R}\}$

$\left[= \frac{\partial}{\partial x} g(x_0) = g'(x_0)\right]_{g(x) = f(x, y_0)}$ (η $h \mapsto f(x_0 + h, y_0) \in \mathbb{R}$ $= g'(h)$)

$= 2x_0 e^{x_0^2+y_0^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 e^{x_0^2+y_0^2} \Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 2e^{x_0^2+y_0^2}(x_0, y_0)$$

'Aoxnon

$$\frac{\partial \|\vec{x}\|}{\partial x_1} = ?$$